Республиканский инженерный-лицей интернат

Решения заключительного этапа олимпиады «Матлет» 2023-2024 гг (5 класс)

1. **Можно ли расставить целые числа от 0 до 15 (включительно) в фигуры четырехлистника (используя каждое число один раз) так, чтобы сумма четырех чисел в каждом фигурном лепестке (каждый лепесток состоит из четырех фигур одного типа), сумма четырех чисел в центральном квадрате (он обведен дополнительно), а также сумма четырех чисел вдоль каждой из двух больших диагоналей были все равны между собой?**

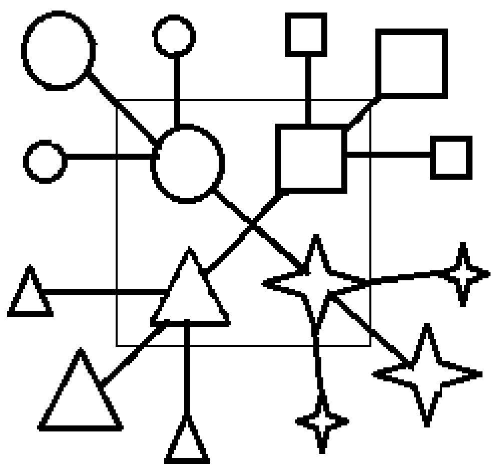

Рис. 1: Четырехлистник

Решение:
Сумма всех чисел равна $0 + 1 + 2 + ... + 13 + 14 + 15 = 120$ Так как во всех лепестках сумма должна быть одинаковой и вместе они дают сумму всех чисел, то в каждом из них сумма должна быть равна $S = \dfrac{120}{4} = 30$. Таким образом, если нужная расстановка существует, то сумма в каждом из требуемых элементов должна быть равна 30.

Да, такая расстановка возможна. Кроме того, существует достаточно много вариантов требуемой расстановки. Один из них показан ниже (для упрощения понимания все фигурки заменены на кружочки).

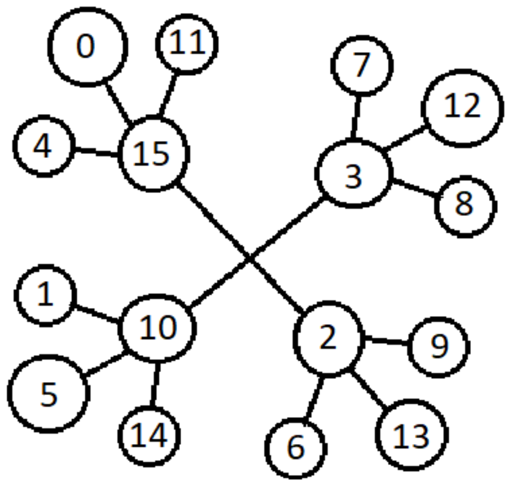

Рис. 2: Расстановка чисел

Критерии оценивания:

• *За любой полностью верный пример (при этом участник не обязан объяснять, как он составил этот пример)* - **7 баллов**

• *Если участник не смог полностью сделать расстановку, но показал, что сумма в каждом из требуемых элементов должна быть 30* - **1 балл**

• *Если не выполнен ни один из вышеперечисленных пунктов (даже если расстановка почти сделана, но не до конца)* - **0 баллов**

2. **Собрав в лесу ягоды, Диана и Зарина разложили их в 8 лукошек по равному количеству ягод в каждом лукошке. Решив, что идти так домой слишком неудобно, Диана съела одну ягоду, после чего девочки разложили все ягоды поровну в 7 лукошек. Однако и 7 лукошек тоже оказалось не очень удобным, поэтому Зарина нашла одну ягоду, после чего урожай был сразу распределен поровну уже на 6 лукошек. Но и это было недостаточно комфортным в транспортировке, поэтому Диана снова быстренько съела одну ягоду, и ягоды были незамедлительно разложены поровну в 5 лукошек. В конце концов, так как 5 лукошек**

не распределишь поровну между двумя людьми (кому-то придется нести как минимум 3 лукошка), девочками было решено сократить количество лукошек до 4. Какое минимальное количество ягод могло быть собрано первоначально и сколько ягод теперь придется найти Зарине, чтобы нести урожай домой уже в четырех лукошках с одинаковым количеством ягод в каждом?

Решение:

Пусть изначально было собрано N ягод. Тогда, так как это количество ягод было поровну распределено по восьми лукошкам, то N нацело делится на 8. Рассуждая аналогично, получаем:
$(N-1)$ делится на 7,
N делится на 6,
$(N-1)$ делится на 5,

Наша задача: найти минимальное N, удовлетворяющее этим условиям. Так как N одновременно делится и на 8 и на 6, то N точно делится на 24 (НОК(6;8) = 24). Аналогично, так как $(N-1)$ делится и на 7 и на 5, то $(N-1)$ делится на 35 (НОК(5;7) = 35)

Так как $(N-1)$ делится на 35, то $(N-1) = 35 \cdot k$, где k - натуральное, то есть $N = 35 \cdot k + 1$

Теперь будем пробегать по натуральным k по возрастанию,начиная с 1, и искать такое первое значение N, которое поделится на 24. Здесь мы приведем сразу ответ: $k = 13$. Тогда $N = 456$ и это минимальное значение N, которое делится на 24.

Таким образом, минимальное количество ягод, которое могло быть собрано первоначально, равно 456. Так как после того, как Диана второй раз съела ягоду, их стало 455, то теперь, чтобы число ягод делилось на 4, Зарине вновь придется найти одну ягоду $(456 = 4 \cdot 114)$

Ответ: 456 ягод, 1 ягода

Критерии оценивания:

- *За верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Если участник из делимости N на 8 и на 6, сделал вывод, что N делится на 48 и верно нашел другое минимальное N исходя из этого* - **1 балл**
- *Если решение верно, но есть необоснованные моменты, то в зависимости от важности наличия обоснования тех или иных переходов* - **3-5 баллов**

3. **Есть 55 красных гирек по 55 грамм каждая, 66 синих гирек по 66 грамм каждая, 77 зеленых гирек по 77 грамм каждая и 88 желтых гирек по 88 грамм каждая. Однако известно, что есть ровно одна гирька, которая легче указаного на ней номинала. Можно ли гарантированно за два взвешивания на чашечных весах без дополнительных гирь найти цвет неправильной гирьки? Если это невозможно, то за какое минимальное количество взвешиваний это гарантированно можно сделать?**

Решение:

Да, за 2 взвешивания найти цвет неправильной гирьки возможно. Для этого первым взвешиванием мы на одну чашу весов кладем 55 красных гирек и 55 желтых, а на другую - 55 синих гирек и 55 зеленых. Если бы все гирьки оказались бы правильными, то весы показали бы равновесие, так как:
$55 \cdot 55 + 55 \cdot 88 = 55 \cdot 66 + 55 \cdot 77$
Это равенство легко проверить, если вынести 55 как общий множитель, в каждой части равенства:
$55 \cdot (55 + 88) = 55 \cdot (66 + 77)$
$55 \cdot 143 = 55 \cdot 143$ - верное равенство !!!

Таким образом, если весы в равновесии, то использованные при первом взвешивании гирьки - правильные, а значит фальшивая гирька среди оставшихся 11 синих, 22 зеленых и 33 желтых. Тогда вторым взвешиванием мы на одну чашу весов кладем 11 правильных синих гирек (из первого взвешивания) и 22 непроверенных зеленых, а на вторую чашу весов кладем 11 непроверенных синих и 22 правильных зеленых (из первого взвешивания). Тогда, на той чаше весов, которая окажется легче, неправильная гирька будет среди тех, которые не участвовали при первом взвешивании и мы гарантированно найдем цвет неправильной гирьки. А если второе взвешивание покажет равновесие, то фальшивая гирька будет среди 33 оставшихся желтых.

Если же при первом взвешивании легче будет чаша с 55 красными и 55 желтыми гирьками, то вторым взвешиванием мы кладем на чаши весов по 44 желтых гирьки. Если будет равновесие, то фальшивая среди красных гирек, если будет отклонение, то фальшивая среди желтых.

Аналогично, если при первом взвешивании легче будет чаша с 55 синими и 55 зелеными гирьками, то вторым взвешиванием мы кладем на чаши весов по 33 синих гирьки. Если будет равновесие, то фальшивая среди зеленых гирек, если будет отклонение, то фальшивая среди синих.

Мы предъявили пример на 2 взвешивания. Теперь осталось доказать, что за одно взвешивание найти цвет фальшивой гирьки невозможно. При взвешивании мы можем получить либо отклонение одной из чаш весов, либо равенство. Также при взвешивании в нем участвует либо гирьки только одного цвета, либо двух цветов, либо трех, либо всех четырех цветов. При этом для любого из вариантов взвешивания может найтись случай, который не даст отднозначного ответа на вопрос о цвете фальшивой гирьки. Если мы используем только один цвет, то в случае равенства весов, мы не сможем ничего сказать о цвете неправильной гирьки (так как осталось непроверенными три цвета). В случае взвешивания гирек двух цветов при равенстве весов мы также не сможем сказать, какой из оставшихся двух цветов содержит фальшивую гирьку. В случае взвешивания гирек трех или четырех цветов, на одной из чаш весов будет как минимум два цвета и если эта чаша будет легче, то цвет фальшивой гирьки также не будет определен однозначно.

Таким образом, за одно взвешивание гарантированно найти цвет фальшивой гирьки нельзя. Оценка доказана

Ответ: за 2 взвешивания

Критерии оценивания:

- *Предъявлен верный алгоритм нахождения фальшивой гирьки за 2 взвешивания)* - **«+4» баллов**
- *Если участник приводит решение для 3 или более взвешиваний (вне зависимости, дают они в итоге нахождение цвета фальшивой гирьки или нет)* - **0 баллов**
- *Если прослеживается верная идея решения на 2 взвешивания, но при этом допущены не более одной некритической логической ошибки* - **1-2 балла**
- *Если логических ошибок более одной или есть более одного необоснованного перехода* - **0 баллов**

4. **Айгузель написала на четырех карточках цифры: 2, 4, 5 и 7 (по одному числу на каждой карточке). После этого она составила из них все возможные различные четырехзначные числа, потом все возможные различные трехзначные числа, затем - все возможные двухзначные и наконец, все возможные однозначные числа. Чему равна сумма всех чисел, составленных Айгузель?**

Решение:

1) Рассмотрим сначала четырехзначные числа: на первую позицию можно поставить любую из четырех цифр, на вторую - любую из трех оставшихся (карточки в единичном экземпляре, поэтому цифры повторять нельзя), на третью позицию - любую из двух оставшихся, и на четвертую позицию остается 1 вариант. Таким образом, общее количество различных четырехзначных чисел равно $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
При этом все четырехзначные числа разбиваются на пары, каждая из которых в сумме дает 9999 (в паре идут цифры 4-5 и 2-7, например, 2457-7542, 4725-5274 и т.д.). Всего $\frac{24}{2} = 12$ пар. Значит сумма всех четырехзначных чисел равна $12 \cdot 9999$

2) Теперь рассмотрим трехзначные числа: на первую позицию можно по-

ставить любую из четырех цифр, на вторую - любую из трех оставшихся, на третью позицию - любую из двух оставшихся. Таким образом, общее количество различных трехзначных чисел равно $4 \times 3 \times 2 = 24$

При этом все трехзначные числа снова разбиваются на пары, в сумме дающие 999 (в паре идут цифры 4-5 и 2-7, например, 457-542, 725-274 и т.д.). Всего $\dfrac{24}{2} = 12$ пар. Значит сумма всех трехзначных чисел равна $12 \cdot 999$

3) Количество двухзначных чисел равно $4 \times 3 = 12$, значит количество пар, в сумме дающих 99, равно 6. Общая сумма равна $6 \cdot 99$

4) Количество однозначных чисел равно 4, разбиваем на пары 4-5 и 2-7, количество пар равно 2, а общая сумма 2×9

Итого, общая сумма: $12 \cdot 9999 + 12 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 2 \times 9 = 132588$

Ответ: 132588

Критерии оценивания:

- *За верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Если участник решал эту задачу вышеуказанным способом, но при этом допустил арифметическую ошибку при финальных вычислениях* - **5 баллов**
- *Если участник решал эту задачу «в лоб», выписывая все числа (или не выписывая, но четко обосновывая алгоритм их написания), и верно просуммировал их* - **7 баллов**
- *Если участник решал эту задачу «в лоб», выписывая все числа (или не выписывая, но четко обосновывая алгоритм их написания), но допустил арифметическую ошибку при суммировании* - **5 баллов**
- *Если участник решал эту задачу «в лоб», выписывая все числа, но при этом выписал не все возможные числа (пропустил один или несколько вариантов)* - **1 балл**

5. **Какое наибольшее количество ферзей можно расставить на данной доске, чтобы ни один ферзь не бил никакого другого ферзя.**

Через закрашенную область действие ферзя не распространяется. Примечание: ферзь бьет по вертикали и горизонтали, а также по обеим диагоналям от той клетки, на которой стоит. ***(В данной задаче нужно не только расставить ферзей, но и доказать, что расставить больше ферзей уже принципиально невозможно)***

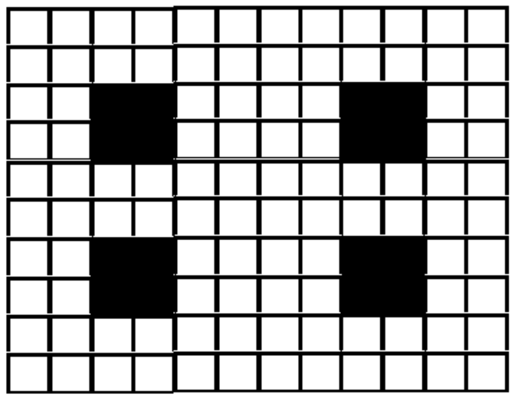

Рис. 3: Необычная доска

Решение:

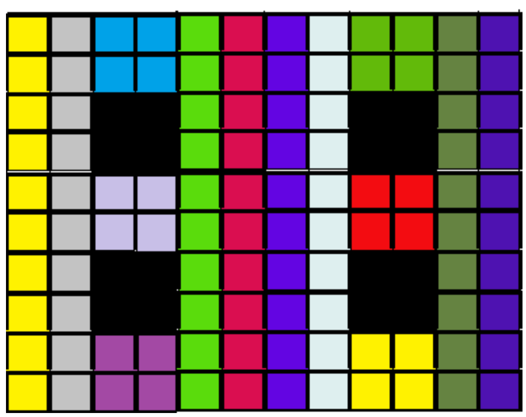

Рис. 4: Первая оценка на количество ферзей

Сначала докажем, что больше 14 ферзей расставить нельзя. Разделим таблицу на области, как показано на рисунке (каждая область отмечена отдельным цветом). В каждой выделенной области можно поставить не более одного ферзя (в случае столбца ферзь пробивает весь столбец, а в случае квадрата 2×2 - ферзь, стоящий в квадрате, пробивает весь квадрат). Областей 14, а значит расставить более 14 ферзей невозможно принципиально.

Теперь докажем более аккуратную оценку. Если мы хотим расставить 14 ферзей, то нам нужно поставить по 1 одному ферзю в каждую выделенную область. Докажем, что если расставить по 1 ферзю во все области, кроме двух центральных столбцов (оставлены белыми), то в них уже не получится поставить ферзей. Итак, каждый из двух ферзей, поставленных в верхние два квадрата 2×2, занимает по одной верхней строчке (один ферзь пробивают всю верхнюю строку, второй ферзь - вторую строчку сверху). Это значит, что в верхние две строчки больше поставить ферзей нельзя. Аналогично ферзи в двух средних квадратах 2×2 по отдельности пробивают всю 5-ую и 6-ую строчки, как и ферзи в нижних квадратах 2×2 не позволяют поставить еще одного ферзя в предпоследнюю и последнюю строчки.

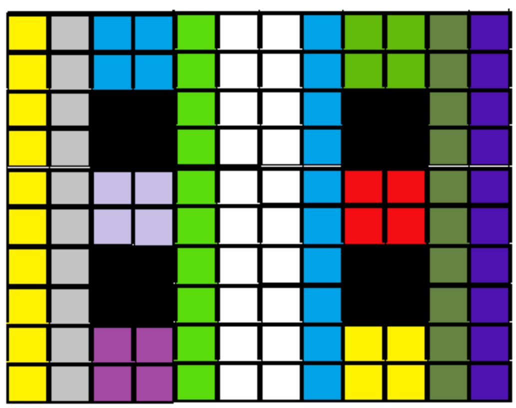

Рис. 5: Вторая оценка на количество ферзей

Теперь нам нужно поставить одного ферзя в 5-ый столбец, и еще одного ферзя в 8-ой столбец. Каждый из них должен занимать одну из двух клеточек возле закрашенного квадрата (так как остальные строки пробиваются ферзями из квадратов 2×2). Каждый из этих двух ферзей пробивает еще по одной новой строке, а также несколько клеточек по обеим диагоналям (возможно, что некоторые клеточки пробиваются от двух ферзей). Самое главное то, что ферзи,стоящие в квадратах 2×2 пробивают достаточно много клеток и по диагоналям, при этом ферзи, стоящие в 5-ом и 8-ом столбцах, не могут стоять в этих же диагоналях.

Из-за этого они пробивают уже по своим диагоналям все оставшиеся в центральных двух столбцах клетки. Из-за этого, поставить в центральные два столбца ферзя невозможно. Таким образом, ни 14, ни 13 ферзей расставить невозможно (иначе пришлось хотя бы одного поставить в один из двух центральных столбцов, а это невозможно). Таким образом, расставить больше 12 ферзей невозможно. Оценка доказана.

А на 12 ферзей есть пример:

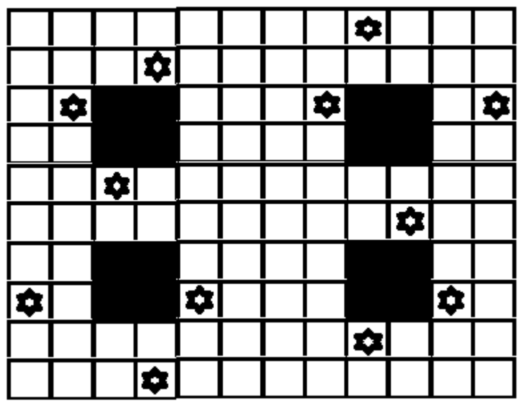

Рис. 6: Расстановка ферзей

Ответ: 12 ферзей

Критерии оценивания: задача оценивается отдельно по пунктам
Так как оценку на 12 ферзей практически невозможно строго обосновать, не доказывая по пути оценку на 14 ферзей, эти две оценки поощряются баллами отдельно

- *Верный пример на 12 ферзей* - **«+2» балла**
- *Верная строго обоснованная оценка на 14 ферзей* - **«+2» балла**
- *Верная строго обоснованная оценка на 12 ферзей* - **«+3» балла**