Республиканский инженерный-лицей интернат

Решения заключительного этапа олимпиады «Матлет» 2023-2024 гг (6 класс)

1. **Есть семь мешков с большим количеством монет в каждом, в одном из которых только монеты по 3 грамма, в другом - только по 4 грамма, в третьем - только по 5 грамм, и так далее, по 8, 11, 16 и 17 грамм соответственно. Вес одной монеты в каждом мешке указывала соответствующая на нем надпись. Однако, хитрый мистер Фикс стер все подписи и теперь вся информация о массах монет оказалась утеряна. За какое минимальное количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантированно определить истинный вес одной монеты из некоторого произвольно выбранного мешка?** ***(В данной задаче нужно не только предъявить алгоритм нахождения веса одной монеты из указанного мешка, но и доказать, что гарантированно найти данный вес за меньшее количество взвешиваний уже принципиально невозможно)***

   Решение:

   Приведем алгоритм нахождения веса выбранной монеты за 2 взвешивания. Сначала соорудим свою «гирьку», взяв по одной монете из каждого мешка. Тогда мы гарантированно возьмем по одной монете каждой массы. Значит суммарно мы возьмем $S = 3 + 4 + 5 + 8 + 11 + 16 + 17 = 64$ грамма.

   Теперь первым взвешиванием мы сравниваем вес нашей гирьки с восемью монетами из указанного мешка. Если весы в равновесии, то в указанном мешке монеты по 8 грамм. Если «гирька» весит больше, то восемь монет из указанного мешка весят меньше 64 грамм, а значит каждая монета весит меньше 8 грамм, то есть может весить либо 3 грамма, либо 4 грамма, либо 5 граммов. Вторым взвешиванием мы сравниваем «гирьку» и 16 монет из указанного мешка. Если весы в равновесии, то наши монеты весят по 4 грамма. Если «гирька» перевешивает, то монеты по 3 грамма, а если гирька оказалась легче, то монеты по 5 грамм

Если же при первом взвешивании «гирька» весит меньше 8 монет, то каждая из них весит больше 8 грамм. Тогда вторым взвешиванием мы сравниваем нашу «гирьку» и 4 монеты из указанного мешка. Если весы в равновесии, то монеты весят по 16 грамм. Если гирька перевешивает, то монеты по 11 грамм. Если же гирька весит меньше четырех монет, то эти монеты по 17 грамм

Теперь докажем оценку: а именно то, что за одно взвешивание гарантированно определить вес монет в указанном мешке нельзя. Пусть в указанном мешке монеты по 11 грамм. Чтобы за одно взвешивание определить эту величину, нужно получить исключительно равенство на весах, когда на одной чаше весов заранее точно определенный вес (наподобие сооруженной нами «гирьки»), кратный 11, а на второй некоторое (заранее определнное) количество монет по 11 грамм. Если мы получим равенство, то мы действительно сразу определим вес в 11 грамм. Однако, если изначально вес монет был не 11 грамм, то равенство не получится. А значит в случае перевешивании «новой гирьки» мы не сможем сказать, наши монеты по 3, 4, 5 иил 8 грамм. Аналогично в случае, если «новая гирька» легче, мы не сможем сказать: наши монеты по 16 грамм или по 17 грамм. Оценка доказана.

Ответ: за 2 взвешивания

Критерии оценивания:

- *Приведен верный полностью обоснованный алгоритм нахождения веса монеты за 2 взвешивания* - **«+5» баллов**
- *Доказана верная оценка, что за одно взвешивание мы не сможем гарантированно найти вес монеты* - **«+2» балла**
- *Приведен верный (или неверный) алгоритм нахождения веса монеты за 3 или более взвешиваний* - **0 баллов**

2. **Однажды при поиске древнейших сокровищ Дарина и Вероника оказались перед заколдованным порталом. В средневековье**

пароль был написан прямо на стене пирамиды, однако, чтобы священный грааль всегда принадлежал им, чародеи и волшебники зашифровали пароль, заменив каждую цифру от 0 до 9 какой-то другой цифрой (при этом каждая «новая» цифра является шифром лишь для одной исходной цифры), и рядом написали следующие верные равенства:
$\mathbf{12 + 17 = 00, \quad 94 + 72 = 19, \quad 2 + 1 = 77, \quad 40 + 69 = 53}$
А вместо прошлого пароля высветилась следующая комбинация цифр: 012356789. И теперь, чтобы пройти сквозь портал, необходимо ввести истинный пароль, который был до шифрования. Помогите нашим юным исследователям разгадать пароль и пройти через портал.

Решение:
Новые («неправильные») обозначения цифр будем писать в кавычках, правильные - без кавычек. Рассмотрим равенство «2» + «1» = «77». Мы видим, что два однозначных числа в сумме дали двухзначное, состоящее из одинаковых цифр. Этими одинаковыми цифрами могут быть только цифра 1, так как получить 22 и более как сумму двух однозначных цифр невозможно. Значит «7» = 1. Значит «1» и «2» могут быть (9;2) или (8;3) или (7;4) или (6;5) или (5;6) или (4;7) или (3;8) или (2;9).

Рассмотрим равенство «12» + «17» = «00». Учитывая, что в сумме должно получится двухзначное число, которое состоит из одинаковых цифр, и учитывая предыдущие результаты на все возможные значения пары цифр «1» и «2» (всего 8 вариантов), нетрудно показать (простым полным перебором), что подходит только равенство 47 + 41 = 88, то есть «1» = 4 , «2» = 7, «0» = 8.

Рассмотрим равенство «94» + «72» = «19».
Подставляю уже найденные значения цифр, получаем:
«94» + 17 = 4«9»
Цифра «9» не может быть больше 3 (иначе количество десятков в сумме будет больше 4) и не может быть равно 1 (иначе не наберется 4 десятка в сумме). Если «9» = 2, то «4» = 5, получаем 25 + 17 = 42 - верное равенство !!! Если «9» = 3, то по сумме в разряде единиц «4» = 6, то есть

$36 + 17 = 43$ - неверно. Значит «9» $= 2$, а «4» $= 5$

И осталось рассмотреть еще одно равенство «40» + «69» = «53»
Остались цифры: 0, 3, 5, 9 Подставляем уже найденные значения:
58 + «6»2 = «53»
Цифра «6» не может равняться 0 (так как это первая цифра в двухзначном числе), не может равняться 5 и 9, так как сумма данных двухзначных чисел перевалит за 100. Значит «6» = 3, а цифра «3» = 0 . Тогда «5» = 9. Получаем верное равенство:
$58 + 32 = 90$
По остаточному принципу «8» = 6
Таким образом пароль «0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9» соответствует следующей комбинации 8, 4, 7, 0, 5, 9, 3, 1, 6, 2

Ответ: 8, 4, 7, 0, 5, 9, 3, 1, 6, 2

Критерии оценивания:
- *Полностью верное обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Если участник показал лишь то, что «7» = 1, а дальше существенных продвижений нет или допущены арифметические или логические ошибки* - **1 балл**
- *Участник изначально допустил ошибку, что привело к полностью неправильному решению* - **0 баллов**

3. **Однажды Аделия пришла на конференцию чуть пораньше и решила прогуляться. Конференц-зал представлял собой большое помещение, в центре которого находился подиум для выступающего, а вокруг него по кругу в один ряд стояли кресла. Каждое кресло ряда было окрашено в какой-то определенный цвет, причем кресла одного цвета всегда располагались рядом (то есть любые два кресла одного цвета соединены цепочкой кресел этого же цвета). Также Аделия заметила, что нумерация кресел каждого цвета начиналась с 1, если идти против часовой стрелки. Чтобы рассмотреть все получше, Аделия решила обойти конференц-зал вдоль ряда кресел против часовой стрелки. Стартовав с кресла №4 и пройдя некоторое расстоя-**

ние, она оказалась у кресла №8. Затем пройдя вдвое большее расстояние, Аделия оказалась у кресла №6. После этого она прошла еще вдвое большее расстояние и оказалась у кресла №2. И наконец еще раз увеличив вдвое пройденный путь, она вернулась к тому месту, откуда начинала обход. Известно, что Аделия каждый раз останавливалась у кресел разных цветов, при этом нет такого цвета, который бы она прошла, не останавливаясь. Сколько кресел каждого цвета в ряду, если наибольшее количество кресел одного цвета равно 94?

Решение:

Самым честным было бы считать, что Аделия начинает и заканчивает движение у середины стартового и финального кресел. Но в силу того, что так немного неудобно, мы будем считать, что Аделия начинает движение с правого края стартового кресла и заканчивает движение у правого края финального кресла (то есть стартовое кресло в расчет расстояния не включается, а финальное - включается). Ответ при таком допущении, разумеется, не изменится.
Сначала покажем, почему Аделия, вернувшись к стартовому месту, прошла лишь один круг (в принципе ничто не мешает ей четырьмя действиями пройти два круга и вернуться в исходное место). В условии сказано, что нет такого цвета, который она прошла бы, не останавливаясь, но при этом у каждого цвета она останавливалась лишь один раз. Если бы она пошла на второй круг, то чтобы каждый раз останавливаться у нового цвета, на первом круге ей пришлось бы этот цвет пройти, не останавливаясь, что запрещено условием

Пусть при первом движении ей пришлось пройти x кресел первого цвета. Тогда всего за первое действие она прошла $x + 8$ кресел. Тогда во второй раз она прошла $2x + 16$ кресел. Так как она оказалась у кресла №6 третьего цвета, то количество пройденных кресел второго цвета при втором движении равно $2x+10$ (а значит общее количество кресел второго цвета равно $2x+18$, так как она стартовала с кресла №8 данного цвета).

В третий раз она прошла расстояние $4x + 32$ кресел. Так как она оказа-

лась у кресла №2 четвертого цвета, то она за третье движение она прошла $4x + 30$ кресел третьего цвета (а значит общее количество кресел третьго цвета равно $4x + 36$)
В четвертый раз она прошла $8x + 64$. Так как она про итогу вернулась в креслу №4 первого цвета, то количество пройденных кресел четвертого цвета за четвертое движение равно $8x + 60$ (а значит общее количество кресел четвертого цвета равно $8x + 62$)

По условию, наибольшее количество кресел одного цвета равно 94, а значит можно составить уравнение:
$8x + 62 = 94$
$8x = 32$
$x = 4$

Значит кресел 1-го цвета: $x + 4 = 8$
Кресел 2-го цвета: $2x + 18 = 26$
Кресел 3-го цвета: $4x + 36 = 52$
Кресел 4-го цвета: $8x + 62 = 94$

Ответ: 8, 26, 52, 94

Критерии оценивания:

- *Верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
При этом, если ученик сразу принял тот факт, что Аделия прошла лишь один круг, без обоснования, нужно снять **1 балл**
- *Верная идея решения, но допущена арифметическая ошибка, которая не является следствием логической ошибки* - **3 балла**
- *В решении допущена одна или более одной логической ошибки* - **0 баллов**

4. **Однажды Константин попал в плен к пиратам. В темнице были только две двери, из которых только одна вела на свободу. Узнав, что Константин является математиком, капитан предложил ему загадку. Он сказал: «Каждый из восьми стражников, которые охраняют темницу, является либо лжецом (который**

всегда лжет), либо рыцарем (который всегда говорит правду). Сейчас каждый из них (кроме последнего) произнесет какую-нибудь фразу, после чего у тебя будет возможность задать лишь один вопрос промолчавшему стражнику. Затем ты должен будешь выбрать одну из дверей. Помни, что лишь одна из них ведет на свободу. Кроме того, знай, что хотя бы один рыцарь среди стражников есть». Как и сказал капитан, восемью стражниками были по очереди произнесены следующие фразы (они касаются исключительно других стражников, не включая капитана): «Среди моих соратников ровно 4 лжеца», «Среди моих соратников ровно 3 лжеца»; «Среди моих соратников ровно 2 лжеца», «Среди моих соратников ровно 1 лжец», «Среди моих соратников ровно 0 лжецов», «Среди моих соратников ровно 6 лжецов», «Среди моих соратников ровно 6 лжецов». Последний стражник, как и было велено, промолчал. Сможет ли Константин с помощью одного вопроса восьмому стражнику гарантированно выйти на свободу? Если да, то как это сделать?

Решение:
1) Допустим, что первый стражник - рыцарь. Тогда среди его соратников действительно 4 лжеца. Покажем, что в таком случае второй стражник не может быть ни рыцарем, ни лжецом. Пусть второй стражник - рыцарь. Тогда среди других стражников должно быть 3 лжеца, но так как первый стражник - рыцарь (по предположению), то получается, что среди стражников от третьего до восьмого должно быть одновременно 4 и 3 лжеца, что невозможно. Теперь пусть второй стражник - лжец. Тогда кроме него должно быть 3 лжеца (согласно фразе первого стражника). Но тогда получается, что второй стражник сказал правду, что недопустимо для лжеца. Таким образом, второй стражник не может быть ни рыцарем, ни лжецом. А значит весь такой случай невозможен, а значит первый стражник - лжец.

2) Допустим, что второй стражник - рыцарь. Тогда, так как он говорит правду, то среди стражников от 3-его до 8-го ровно 2 лжеца (так как есть еще первый стражник - лжец). Покажем, что в таком случае третий стражник не может быть ни рыцарем, ни лжецом. Если третий страж-

ник рыцарь, то он говорит неправду, так как помимо него 3 лжеца, а если он лжец, то он говорит правду, так как помимо него действительно 2 лжеца. Значит весь случай невозможен, а значит второй стражник - лжец

3) Допустим, что третий стражник - рыцарь. Тогда, так как он говорит правду, то среди стражников от 4-го до 8-го нет лжецов (так как первые два стражника уже лжецы). Получается, что четвертый стражник должен быть рыцарем. Но это невозможно, так как согласно его фразе, кроме него, только 1 лжец - противоречие. Значит третий стражник - лжец

4) Четвертый стражник уже не может быть рыцарем, так как гарантировано уже есть как минимум 3 лжеца. А значит четвертый стражник - лжец. Аналогично лжецом является и пятый стражник.

5) Среди шестого, седьмого и восьмого стражника могут быть следующие конфигурации типов персонажей: РРЛ, РЛР, ЛРР и ЛЛЛ. Но так как хотя бы один рыцарь должен быть, то ЛЛЛ невозможно. Осталось РРЛ, РЛР, ЛРР. Во всех трех случаях ровно один лжец. Константин должен подойти к промолчавшему стражнику и спросить у него, указывая на одну из дверей: «Что ответит тебе седьмой стражник, если ты попросишь его узнать у шестого стражника - ведет ли эта дверь на свободу?». Из-за того, что фраза пройдет через одного лжеца, ответ будет противоположным правдивому (ведь рыцарь будет либо говорить правду, либо просто перескажет ложный ответ лжеца. А лжец либо сразу соврет, либо поменяет правдивый ответ рыцаря). Таким образом, если промолчавший стражник скажет «нет», то дверь ведет на свободу, если он ответит «да», то другая дверь ведет на свободу. Таким образом, Константин может гарантированно спастись.

Ответ: да, может

Критерии оценивания

- *Полное, полностью обоснованное и верное решение* - **7 баллов**
- *Если участник доказал, что первые пять стражников - лжецы* - **2 балла**

- *Если участник доказал, что первые пять стражников - лжецы, а среди оставшихся ровно 1 лжец* - **4 балла**

5. **Андрею Николаевичу для подготовки к занятию по олимпиадной математике нужно заполнить таблицу 100×100 числами так, чтобы среди девяти чисел, стоящих на пересечении любых трех различных строк и любых трех различных столбцов, было хотя бы 8 различных чисел. Какое наименьшее количество различных чисел ему нужно использовать, чтобы выполнить поставленное условие?** ***(В данной задаче нужно не только найти подходящий пример расстановки определенного количества различных чисел, выполняющий условие задачи, но и доказать, что обойтись меньшим количеством различных чисел уже принципиально невозможно)***

Решение:

Можно сразу сказать, что в таблице нет трех одинаковых чисел. Так как если бы где-то в таблице были бы три одинаковых числа, то мы можем выбрать три строчки и три столбца, в которых находятся эти числа. При этом, если какие-то два одинаковых числа находятся в одной строке (или столбце), то в качестве третьей строки берем произвольную строку (столбец). Тогда среди девяти чисел на пересечении есть три одинаковых, а значит не более 7 различных чисел, что противоречит условию. Значит каждое число используется не более двух раз. То есть понадобится как минимум 5000 различных чисел

Если два одинаковых числа стоят в одной строке, то в соответствующих столбцах больше не должно быть никаких двух одинаковых чисел. Иначе мы выбираем эти два столбца, а затем строку с нашими исходными двумя одинаковыми числами и две строки, в которых стоят другие одинаковые числа. В качестве третьего столбца можно взять произвольный. И тогда среди девяти выбранных чисел есть уже две пары одинаковых, что также противоречит условию. Таким образом, если два одинаковых числа поставить в одну строку (или в один столбец, рассуждения в этом случае аналогичны), то остальные $2 \cdot 99 = 198$ чисел в этих двух столбцах должны быть уникальными, что конечно очень невыгодно.

Если же поставить два одинаковых числа в разные и строку и столбец, то нам нужно будет лишь поставить два уникальных числа в соответствующие пересечения двух строк и столбцов (если поставить туда одинаковые числа, то мы вновь можем выбрать эти две строки и два столбца, а в качестве третьей строки и столбца взять произвольные. Тогда на пересечении будет максимум 7 различных чисел). Таким образом, в каждом прямоугольнике, где по диагонали на краях стоят одинаковые числа, те числа, которые стоят на краях другой диагонали должны быть разными. Таким образом, мы доказали, что среди четырех чисел, стоящих на краях любого выбранного прямоугольника, максимум два одинаковых (то есть минимум три различных). Если разбить квадрат 100×100 на квадраты 2×2 (2500 штук), то в каждом квадрате не менее трех различных. Тогда во всем квадрате не менее $2500 \cdot 3 = 7500$ различных. Оценка доказана

Приведен пример, как можно обойтись ровно 7500 различными числами. Разбиваем исходный квадрат 100×100 на 2500 квадратов 2×2. И в каждом квадрате ставим по диагонали (из верхнего левого в правый нижний) ставим одинаковые числа, а на края второй диагонали новые различные уникальные числа. Тогда, как бы Вы не выбирали три строки и три столбца, две пары (или более) одинаковых чисел в итоговые девять чисел на пересечении не попадут. А значит, среди любых таких девяти чисел будет максимум одна пара одинаковых чисел, то есть минимум 8 различных.

Ответ: 7500 чисел

Критерии оценивания:

- *Верно доказана оценка на 5000 различных чисел (что в таблице не может быть больше трех одинаковых чисел)* - **«+1» балл**
- *верно доказана оценка на 7500 различных чисел* - **«+4» балла**
- *Верно приведен пример на 7500 различных чисел* - **«+2» балла**