Республиканский инженерный-лицей интернат

Решения заключительного этапа олимпиады «Матлет» 2023-2024 гг (7 класс)

1. **Отличница Амина написала на доске верный пример, однако проказник Азамат стер часть цифр. Помогите Амине восстановить запись, если она помнит, что сумма цифр первого множителя равна произведению цифр второго множителя** ***Найдите все возможные варианты***

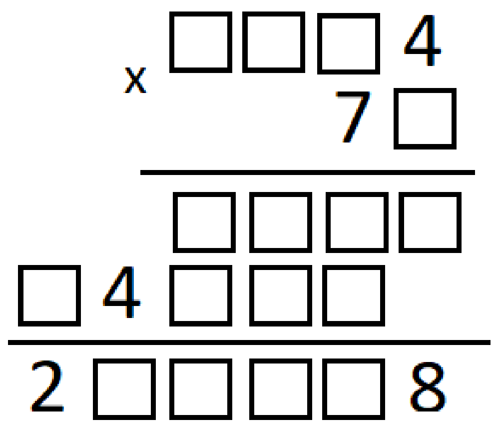

Рис. 1: Восстановите пример

Решение:

Первая цифра первого множителя не может быть равна 4, так как тысячный разряд при умножении на 7 будет как минимум 28 (что противоречит «4» в разряде тысяч во втором слагаемом), и также первая цифра первого множителя не может быть больше 4, так как первая цифра итогового произведения будет как минимум «3», что также не удовлетворяет условию. Также первая цифра первого множителя не может быть 1 или 2, так как в этом случае первая цифра итогового произведения будет максимум 1 (максимальный переход через разряд при суммировании двух чисел равен 1, значит для «4» не хватит перехода разрядов, чтобы первую цифру итогового произведения сделать равной «2»). Таким образом, первая цифра первого множителя равна «3». Таким образом, сумма двух цифр в первом множителе равна 7. Вторая цифра второго сомножителя равна либо 2, либо 7 (чтобы произведение «4» на это число оканчивалось на 8). Но если это 7, то произведение цифр второго множителя равна 49 и такую сумму в первом множителе четырьмя цифрами не набрать, а значит вторая цифра второго множителя равна 2. Тогда произведение равно 14. Так как сумма двух цифр в первом множителе уже равна 7, значит сумма третьей и четвертой цифры также должна равнятся 7. Есть такие варианты для этих цифр: (0;7), (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1), (7;0). Непосредственной проверкой всех вариантов находим, что подходят (4;3) и (5,2)

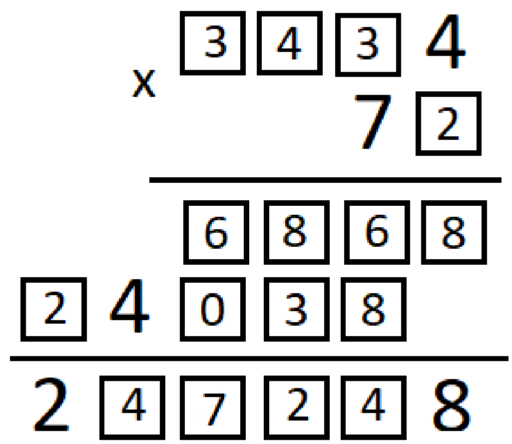

Рис. 2: Восстановите пример

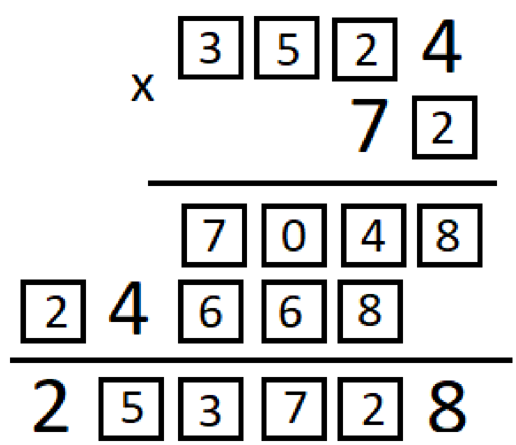

Рис. 3: Восстановите пример

Ответ: 2 возможных варианта

Критерии оценивания:

- *Приведено верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Методом подбора найдено оба возможных варианта и строго доказано, что других решений нет* - **7 баллов**
- *Методом подбора найдено оба возможных варианта, но строгого доказательства, что других решений нет* - **3 балла**

- *Методом подбора найден только один вариант* - **1 балл**

2. **Чтобы прийти к своему другу Алмазу на день рождения ровно в 14:00, Захар в 13:00 вышел из дома. Однако, когда осталось пройти всего 1 км, Захар вспомнил, что забыл взять подарок и стремглав побежал обратно с втрое большей скоростью. Добежав до дома и мгновенно найдя подарок, он, не сбавляя темпа, побежал снова к Алмазу. Ровно в тот момент, когда Захар должен был уже прийти, Алмаз, волнуясь за друга, тоже вышел из дома и потихоньку пошел навстречу. В итоге друзья встретились как раз в том месте, где Захар вспомнил, что забыл подарок. Чему равны скорости ходьбы Алмаза и Захара, и на сколько минут позже запланированного времени подарок был наконец-то вручен имениннику, если известно, что к тому моменту, когда Захар забирал подарок из дома, Алмаз успел пройти 200 метров?**

   Решение:
   Пусть скорость ходьбы Захара равна V, а скорость ходьбы Алмаза равна U. Тогда скорость бега Захара равна $3V$

   Пусть расстояние от дома Захара до того места, где он понял, что забыл дома подарок, равно x

   Так как Захар должен быть пройти все расстояние за 1 час, то получаем уравнение:
   $(1 + x) = V \cdot 1$
   $1 + x = V$ (1-ое уравнение)

Так как Алмаз вышел из дома ровно в 14:00 мы знаем, что Захар потратил на весь совершенный путь 1 полный час и еще столько же времени, сколько Алмазу идти от своего дома до места встречи (1 км)

$\frac{x}{V} + \frac{2x}{3V} = 1 + \frac{1}{U}$ (2-ое уравнение)

Здесь время Захара (а это время ходьбы на расстояние x и время бега на расстояние 2x равно одному полному часу + время ходьбы Алмаза от дома(1 км) до места встречи)

И так мы знаем, что если отсчитывать время от того момента, как Захар забрал подарок (а Алмаз в это время был в 0.8 км от места встречи), то они потратили одинаковое время:

$\frac{x}{3V} = \frac{0.8}{U}$ (3-е уравнение)

Из этого уравнения выражаем $\frac{x}{V}$:

$$\frac{x}{V} = \frac{2.4}{U}$$

И подставляем во 2-ое уравнение:

$$\frac{2.4}{U} + \frac{2 \cdot 2.4}{3U} = 1 + \frac{1}{U}$$

$$\frac{2.4}{U} + \frac{1.6}{U} = 1 + \frac{1}{U}$$

$$\frac{3}{U} = 1$$

$U = 3$ - скорость Алмаза

$$\frac{x}{V} = \frac{2.4}{U} = \frac{2.4}{3} = 0.8$$

$$x = 0.8 \cdot V$$

Подставляем это в 1-ое уравнение: $1 + x = V$

$$1 + 0.8 \cdot V = V$$

$$1 = 0.2V$$

$V = 5$ - скорость ходьбы Захара

Теперь найдем то время, во сколько они встретились. Алмаз вышел в 14:00 и шел 1 км со скорость 3 км/ч. А значит он шел 20 мин. Получаем, что они встретились в 14:20, что говорит о том, что подарок был вручен на 20 мин позже запланированного времени

Ответ: 3 км/ч, 5 км/ч и 20 мин

Критерии оценивания:

- *Полностью верное обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Если участник верно составил все три нужных уравнения (в своих обозначениях), но не смог их решить* - **3 балла**
- *Если участник неправильно составил хотя бы одно из уравнений* - **0 баллов**

3. **Можно ли расставить целые числа от 0 до 21 (включительно) в кружочки (используя каждое число только один раз) так, чтобы сумма пяти чисел вдоль одной прямой (ребра пирамидки) была одинаковой (для всех ребер)?** ***(Если это возможно, то нужно привести пример такой расстановки. Если это невозможно, нужно доказать математическую невозможность такой расстановки)***

Решение:

Допустим, что это возможно, и мы смогли расставить числа так, что условие задачи выполняется:

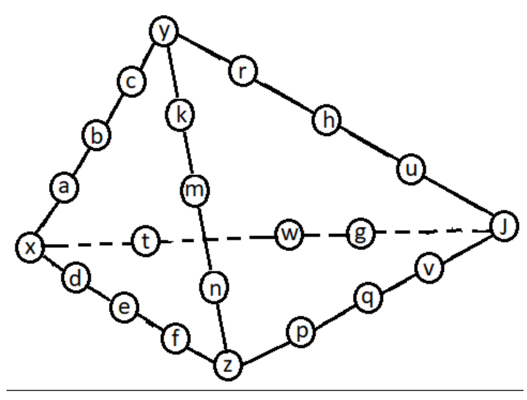

Рис. 4: Восстановите пример

Тогда на каждом ребре сумма пяти чисел одинаковая (обозначим ее через

«S»). Тогда верны следующие равенства:
$S = x + a + b + c + +y$
$S = x + d + e + f + z$
$S = x + t + w + g + J$
$S = y + k + m + n + z$
$S = y + r + h + u + J$
$S = z + p + q + v + J$

Сложим все равенства:
$6S = 2x + 2y + 2z + 2J + (x + a + b + c + y + d + e + f + z + t + w + g + k + m + n + r + h + u + p + q + v)$

Сумма в скобках равна сумме всех расставленных чисел, то есть $(x+a+b+c+y+d+e+f+z+t+w+g+k+m+n+r+h+u+p+q+v) = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 18 + 19 + 20 + 21 = 231$

Получаем равенство:
$6S = 2x + 2y + 2z + 2J + 231$

Это равенство невозможно, так как сумма и все слагаемые, кроме последнего, делятся на 2, а последнее слагаемое не делится на 2. Значит в натуральных числах задача решений не имеет.

Ответ: расстановка невозможна

Критерии оценивания:

- *Верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Любой, сколь угодно длинный текст, не содержащий существенных продвижений оценивается в* - **0 баллов**

4. **Найдите значение выражения:**

$-7 + 2^1 - 2^2 + 3 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^4 + 2^5 - 2^6 + 3 \cdot 2^7 - 7 \cdot 2^8 + 2^9 - 2^{10} + 3 \cdot 2^{11} - -7\cdot 2^{12} + ... - 7\cdot 2^{2016} + 2^{2017} - 2^{2018} + 3\cdot 2^{2019} - 7\cdot 2^{2020} + 2^{2021} - 2^{2022} + 3\cdot 2^{2023} - 2^{2024}$

Решение:

Сгруппируем последние пять слагаемых и вынесем за скобки 2^{2020} в качестве общего множителя:
$-7\cdot2^{2020}+2^{2021}-2^{2022}+3\cdot2^{2023}-2^{2024}=2^{2020}\cdot(-7+2-2^2+3\cdot2^3-2^4)=2^{2020}\cdot(-7+2-4+24-16)=-2^{2020}$

Получается, что теперь искомое выражение приобретает вид:
$-7+2^1-2^2+3\cdot2^3-7\cdot2^4+2^5-2^6+3\cdot2^7-7\cdot2^8+2^9-2^{10}+3\cdot2^{11}-$
$-7\cdot2^{12}+...-7\cdot2^{2016}+2^{2017}-2^{2018}+3\cdot2^{2019}-2^{2020}$

Аналогично сгруппируем последние пять слагаемых и вынесем за скобки 2^{2016} в качестве общего множителя:
$-7\cdot2^{2016}+2^{2017}-2^{2018}+3\cdot2^{2019}-2^{2020}=2^{2016}\cdot(-7+2-2^2+3\cdot2^3-2^4)=2^{2016}\cdot(-7+2-4+24-16)=-2^{2016}$

Получается, что теперь искомое выражение приобретает вид:
$-7+2^1-2^2+3\cdot2^3-7\cdot2^4+2^5-2^6+3\cdot2^7-7\cdot2^8+2^9-2^{10}+3\cdot2^{11}-$
$-7\cdot2^{12}+...-7\cdot2^{2012}+2^{2013}-2^{2014}+3\cdot2^{2015}-2^{2016}$

и так далее. Каждый раз вместо пяти последних слагаемых будет появляться одно слагаемое вида -2^{4k}, где k - некоторое натуральное число. В итоге на предпоследнем шаге последними пяти слагаемыми будут:
$-7+2^1-2^2+3\cdot2^3-2^4=-7+2-4+24-16=-1$

Это итоговый ответ

Ответ: -1

Критерии оценивания

- *Полное, полностью обоснованное и верное решение* - **7 баллов**
- *Если ученик определил верную идею решения (при этом она может существенно отличаться от авторской), но при этом допустил арифметическую ошибку* - **3-4 балла**
- *Если существенных продвижений в решении нет* - **0 баллов**

5. **Камила выписала на доску три натуральных числа в порядке возрастания. Оказалось, что третье число во столько же раз больше второго, во сколько второе число больше первого. Кроме того, она заметила, что удвоенное второе число на 2 меньше суммы первого и третьего чисел. Какие числа Камила могла выписать на доску, если известно, что их сумма меньше 270.** ***(Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет)***

Решение:

Пусть наименьшее число равно x, пусть второе число равно $x \cdot k$, тогда третье число равно $x \cdot k^2$

По второму условию получаем:
$2 \cdot kx + 2 = x + xk^2$
$2 = xk^2 - 2 \cdot kx + x$
$2 = x \cdot (k^2 - 2k + 1)$
$2 = x \cdot (k-1)^2$
$(k-1)^2 = \dfrac{2}{x}$

Теперь будем подбирать x так, чтобы $\dfrac{2}{x}$ было квадратом какого-нибудь числа

1) $x = 2$, тогда $(k-1)^2 = \dfrac{2}{2} = 1$
$(k-1)^2 = 1$
$(k-1) = 1$
$k = 2$
Получаем следующий набор чисел: 2; 4; 8 (сумма равна 14)

2) $x = 8$, тогда $(k-1)^2 = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
$(k-1)^2 = \dfrac{1}{4}$

$(k-1)=\frac{1}{2}$
$k=\frac{3}{2}$
Получаем следующий набор чисел: 8; 12; 18 (сумма 38)

3) $x=18$, тогда $(k-1)^2=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$
$(k-1)^2=\frac{1}{9}$
$(k-1)=\frac{1}{3}$
$k=\frac{4}{3}$
Получаем следующий набор чисел: 18; 24; 32 (сумма 74)

4) $x=32$, тогда $(k-1)^2=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$
$(k-1)^2=\frac{1}{16}$
$(k-1)=\frac{1}{4}$
$k=\frac{5}{4}$
Получаем следующий набор чисел: 32; 40; 50 (сумма 122)

5) $x=50$, тогда $(k-1)^2=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$
$(k-1)^2=\frac{1}{25}$
$(k-1)=\frac{1}{5}$
$k=\frac{6}{5}$
Получаем следующий набор чисел: 50; 60; 72 (сумма 182)

6) $x=72$, тогда $(k-1)^2=\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$

$(k-1)^2 = \frac{1}{36}$

$(k-1) = \frac{1}{6}$

$k = \frac{7}{6}$

Получаем следующий набор чисел: 72; 84; 98 (сумма 254)

7) $x = 98$, тогда $(k-1)^2 = \frac{2}{98} = \frac{1}{49}$

$(k-1)^2 = \frac{1}{49}$

$(k-1) = \frac{1}{7}$

$k = \frac{8}{7}$

Получаем следующий набор чисел: 98; 112; 128 (не подходит, так как сумма 338, что больше 270)

Ответ: подходят только следующие наборы чисел (2; 4; 8), (8; 12; 18), (18; 24; 32), (32; 40; 50), (50; 60; 72), (72; 84; 98)

Критерии оценивания:

- *За верное полностью обоснованное решение* - **7 баллов**
- *Если участник верно составил уравнение на k и x (обозначения могут быть другими)* - **2 балла**
- *Если участник сразу ушел «в подбор» и нашел все варианты, но никак не доказал, что других вариантов нет* - **5 баллов**
- *Если участник сразу ушел «в подбор» и нашел лишь часть вариантов (но более или равное 4)* - **2 балла**
- *Если участник сразу ушел «в подбор» и нашел лишь часть вариантов (меньше 4, но больше 1)* - **1 балл**
- *Если участник сразу ушел «в подбор» и нашел лишь один вариант* - **0 баллов**